ENS Cachan **2008-2009**
M2 parcours MVA

Calcul des variations, Optimisation et Applications en Traitement d'image
Examen écrit, le 6 janvier 2009 à 13h30, durée 1h30

Rédiger Exercice 1 et Problème 2 sur des feuilles séparées

1 Exercice sur la fonctionnelle ROF

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert convexe borné à bord C^1.
Soit f un élément de $L^2(\Omega)$. On considère la fonctionnelle $F : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(u) = \int (f-u)^2 \, dx + \int |\nabla u|^2 \, dx \tag{1}$$

1. Montrez q[illegible] F adm[illegible] un u[illegible]e m[illegible]miseur [illegible]r W[illegible](Ω).
2. Montrez q[illegible] est [illegible]tion [illegible]ne [illegible]ation au[illegible] dériv[illegible] Partielles que vous calculerez.

Indications :
- On rappelle [illegible] est un [illegible]ment [illegible] $W^{1,2}$ [illegible]si u [illegible] dans $L^2(\Omega)$ et sa dérivée au sens des distributions dans $L^2(\Omega \times$ [illegible]
- On rappelle que $W^{1,2}(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega)$.
- La personne peu à l'aise avec les espaces de dimensions infinies pourra commencer par considérer le problème en dimension finie.

2 Méthode de gradient avec projection à pas variable pour une fonction quadratique elliptique

On considère la problème de minimisation suivant :

$$\text{trouver} \qquad \hat{u} \;\; \text{tel que} \;\; F(\hat{u}) = \min_{u \in U} F(u), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2} \langle Bu, u \rangle - \langle c, u \rangle, \quad B \in \mathbb{R}^{N \times N}, \; c \in \mathbb{R}^N, \\ U &= \{u \in \mathbb{R}^N : Au = v\}, \quad v \in \mathbb{R}^M, \quad \operatorname{rank}(A) = M < N, \end{aligned} \tag{3}$$

où B est symétrique et définie positive *(donc toutes ses valeurs propres sont strictement positives)*.
Soit P_U l'opérateur de projection sur U. On considère l'itération

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= G_k(u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ G_k(u) &= P_U\big(u - \rho_k(Bu - c)\big). \end{aligned} \tag{4}$$

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\rho) = \max\big\{|1 - \rho\lambda_{\min}|, |1 - \rho\lambda_{\max}|\big\},$$

où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont la plus petite et la plus grande des valeurs propres de B et $\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$.
   (a) Pour $\lambda > 0$ fixé, calculer $\arg\min_\rho |1 - \rho\lambda|$. Tracer la courbe de $\rho \to f(\rho)$.
   (b) Soit $G = \{r \in \mathbb{R}_+ : f(r) = 1\}$. Déterminer explicitement G et donner sa cardinalité.
   (c) Calculer

$$\hat{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min_\rho f(\rho).$$

(d) Déterminer un intervalle $[a, b]$, avec $0 < a < b$ tel que

$$\rho \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \max\{f(a), f(b)\} < 1. \tag{5}$$

2. Montrer que

$$\|I - \rho B\|_2 = f(\rho).$$

Rappel : pour toute matrice réelle et carrée A, son rayon spectral est $R(A) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i = \textit{valeur propre de } A\}$ *et l'on a* $\|A\|_2 = \sqrt{R(A^T A)}$ *où* A^T *est la matrice transposée de A.*

3. En étudiant $\|G_k(u) - G_k(v)\|_2$ pour $u \in \mathbb{R}^N$, $v \in \mathbb{R}^N$, montrer que

$$\rho_k \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad G_k \text{ est une contraction.}$$

Conclure quant à la convergence de l'itération donnée dans (4).

Rappel : tout opérateur de projection P_U *satisfait l'inégalité* $\|P_U(u) - P_U(v)\|_2 \leq \|u - v\|_2$, $\forall u \in \mathbb{R}^N$ *et* $\forall v \in \mathbb{R}^N$.

4. Si $\hat{u}$ résoud le problème formulé dans (2), montrer que l'itération (4) satisfait

$$\rho_k \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \|u_k - \hat{u}\|_2 \leq \gamma^k \|u_0 - \hat{u}\|_2, \tag{6}$$

où γ est défini dans (5).

5. Commenter le cas où $\rho_k = \hat{\rho}$, $\forall k \geq 0$.
6. Dans le cas d'une fonction $\mathcal{F}$ convexe, coercive et $\mathcal{C}^2$, générale, nous avions obtenu en cours que la méthode de gradient avec projection à pas variable vérifie

$$\rho_k \in [a', b'], \quad 0 < \tilde{a} < \tilde{b} < \frac{2\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}^2} \quad \Rightarrow \quad \exists \tilde{\gamma} < 1 \text{ tel que } \|u_k - \hat{u}\|_2 \leq \tilde{\gamma}^k \|u_0 - \hat{u}\|_2,$$

où $\hat{u}$ est tel que $\mathcal{F}(\hat{u}) = \min\limits_{u \in U} \mathcal{F}(u)$.

(a) Le résultat donné ci-dessus peut-il être appliqué au problème (2) ?

(b) Comparer la valeur de b obtenue à la question (1d) avec $\tilde{b}$ et commenter l'importance du résultat (1d).

7. Soit $w \in \mathbb{R}^N$. Pour U définie dans (3), calculer

$$\hat{z} = \arg\min_{z \in U} \left\{ \frac{1}{2} \|z - w\|_2^2 \right\}.$$

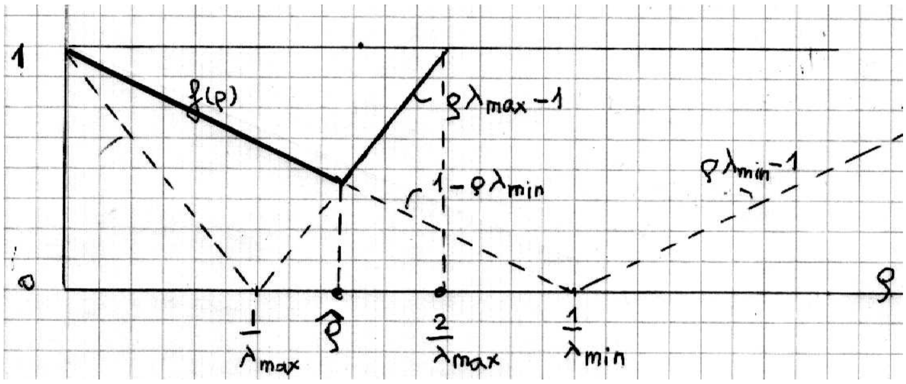
(a) Pour tout $w \in \mathbb{R}^N$, déduire $P_U(w)$ pour U défini dans (3).

(b) Donner une condition assurant que P_U de la question 7a est linéaire.

Corrigé

1

2

1.
   (a) 

   (b) $G = \left\{0, \dfrac{2}{\lambda_{\max}}\right\}$ et $\text{Card}(G) = 2$.

   (c) $\forall a, \forall b$ tels que $0 < a < b < \dfrac{2}{\lambda_{\max}}$ on a $\gamma < 1$.

2. $I - \rho B = (I - \rho B)^T$ donc

$$\|I - \rho B\|_2 = R(I - \rho B) = \max\left\{|1 - \rho\lambda_{\min}|, |1 - \rho\lambda_{\max}|\right\} = f(\rho).$$

3. Soit $\rho_k \in [a, b]$ alors $\gamma < 1$

$$\begin{aligned}
\|G_k(u) - G_k(v)\|_2 &= \|P_U\big(u - \rho_k(Bu - c)\big) - P_U\big(v - \rho_k(Bv - c)\big)\|_2 \\
&\leq \|u - \rho_k Bu - v + \rho_k Bv\|_2 \\
&= \|(I - \rho_k B)(u - v)\|_2 \\
&\leq \gamma\|(u - v)\|_2
\end{aligned}$$

   Quel que soit $\rho_k \in [a, b]$, G_k est une contraction donc $\lim\limits_{k \to \infty} u_k = \hat{u}$ où $G_k(\hat{u}) = \hat{u}$.

4. En utilisant le fait que $G_k(\hat{u}) = \hat{u}$, $\forall \rho_k \in [a, b]$ on a :

$$\begin{aligned}
\|u_k - \hat{u}\|_2 &= \|G_{k-1}(u_{k-1}) - G_{k-1}(\hat{u})\| \\
&= \|P_U\big(u_{k-1} - \rho_{k-1}(Bu_{k-1} - c)\big) - P_U\big(\hat{u} - \rho_{k-1}(B\hat{u} - c)\big)\|_2 \\
&\leq \|u_{k-1} - \rho_{k-1}Bu_{k-1} - \hat{u} + \rho_{k-1}B\hat{u}\|_2 \\
&= \|(I - \rho_{k-1}B)(u_{k-1} - \hat{u})\|_2 \\
&\leq \gamma\|u_{k-1} - \hat{u}\|_2 \\
&\leq \gamma^2\|u_{k-2} - \hat{u}\|_2 \leq \cdots \\
&\leq \gamma^k\|u_0 - \hat{u}\|_2
\end{aligned}$$

5. Si $\rho_k = \hat{\rho}$, $\forall k \geq 0$, l'itération (4) correspond à la méthode de gradient avec projection à pas optimal.

6.
   (a) Oui (évident).

   (b) La borne supérieure $\dfrac{2\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}^2}$ est en général bien plus petite que la nouvelle borne $\dfrac{2}{\lambda_{\max}}$. Grâce à la nouvelle borne, on peut prendre des pas ρ_k plus grands.

7. Lagrangien : $L(z,\lambda) = \dfrac{1}{2}\|z-w\|_2^2 + \lambda^T(Az-v)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^M$. On doit résoudre le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & z - w + A^T\lambda \\ 0 & = & Az - v \end{array}\right.$$

Alors

$$0 = Az - Aw + AA^T\lambda = v - Aw + AA^T\lambda$$

Comme AA^T est inversible,

$$\lambda = (AA^T)^{-1}(Aw - v)$$

Alors

$$\hat{z} = w - A^T\lambda = w - A^T(AA^T)^{-1}(Aw - v) = \big(I - A^T(AA^T)^{-1}A\big)w + A^T(AA^T)^{-1}v$$

(a) $P_U(w) = \big(I - A^T(AA^T)^{-1}A\big)w + A^T(AA^T)^{-1}v$.

(b) $v = 0$.

Master MVA

Durée de l'examen : 2 heures. Aucun document autorisé.

18 Décembre 2007

1 Problème :

Dans tout l'énoncé, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^N$, et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire associé.
On rappelle qu'un sous-ensemble U est convexe si pour tous u, v dans U et θ dans $[0,1]$, on a $\theta v+(1-\theta)u \in U$.
On rappelle aussi qu'une application $\phi : U \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tous u, v dans U et θ dans $[0,1]$, on a :

$$\phi(\theta v + (1-\theta)u) \leq \theta\phi(v) + (1-\theta)\phi(u)$$

On rappelle enfin la formule de Taylor à l'ordre 1 pour une fonction F de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$:

$$F(v) - F(u) = \int_0^1 \langle \nabla F(tv + (1-t)u), v - u \rangle \, dt \tag{1}$$

Dans tout le problème, on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que F vérifie l'inégalité suivante :

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2 \tag{2}$$

On suppose aussi qu'il existe $M > 0$ tel que F vérifie l'inégalité :

$$\|\nabla F(u) - \nabla F(v)\| \leq M\|v - u\| \tag{3}$$

1. Dans cette question (et uniquement dans cette question), on suppose que F s'écrit sous la forme :

$$F(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle \tag{4}$$

avec A matrice réelle et b vecteur de $\mathbb{R}^N$.
Calculer $\nabla F(v)$ (on pourra commencer en supposant A symmétrique).
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que F donnée par (4) vérifie (2) et (3).

2. On revient au cas général pour F. Etant donnés u et v dans $\mathbb{R}^N$, on pose pour θ dans $[0,1]$:

$$\phi(\theta) = F(\theta v + (1-\theta)u) + \frac{\alpha\theta(1-\theta)}{2}\|v - u\|^2 - \theta F(v) - (1-\theta)F(u)$$

Montrer que ϕ est croissante sur $[0,1]$ (on pourra utiliser (1)) . En déduire que pour tous u et v dans $\mathbb{R}^N$, et θ dans $[0,1]$, on a :

$$F(\theta v + (1-\theta)u) + \frac{\alpha\theta(1-\theta)}{2}\|v - u\|^2 \leq \theta F(v) + (1-\theta)F(u) \tag{5}$$

3. Montrer en utilisant (1) et (2) que :

$$F(v) \geq F(u) + \langle \nabla F(u), v - u \rangle + \frac{\alpha}{2}\|v - u\|^2 \tag{6}$$

4. On se donne un sous-ensemble U convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^N$. On étudie le problème de minimisation :

$$\text{Trouver } u \in U \text{ tel que } F(u) = \inf_{v \in U} F(v) \tag{7}$$

Montrer que (7) admet exactement une solution.

5. Montrer que si $U = \mathbb{R}^N$, alors la solution de (7) est caractérisée par :

$$\nabla F(u) = 0 \tag{8}$$

6. Monter qu'en général, la solution de (7) est caractérisée par :

$$\langle \nabla F(u), v - u \rangle \geq 0 \tag{9}$$

pour tout $v \in U$.

7. Dans cette question et jusqu'à la fin du problème, on revient au cas $U = \mathbb{R}^N$.
On part d'un élément v_0 arbitraire dans $\mathbb{R}^N$. Supposant v_k connu, on considère le problème :

$$\text{Trouver } \rho_k \in \mathbb{R} \text{ tel que } F(v_k - \rho_k \nabla F(v_k)) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} F(v_k - \rho \nabla F(v_k)) \tag{10}$$

Montrer que si v_k n'est pas solution de (7), alors (10) admet exactement une solution.

8. Si v_k est pas solution de (7), on pose $v_{k+1} = v_k$. Sinon on pose $v_{k+1} = v_k - \rho_k \nabla F(v_k)$.
Montrer que

$$\langle \nabla F(v_{k+1}), \nabla F(v_k) \rangle = 0$$

9. En déduire que :

$$F(v_k) - F(v_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2} \|v_k - v_{k+1}\|^2$$

10. Montrer que la suite v_k ainsi construite converge vers la solution de (7).
Comment s'appelle cet algorithme ?

2 Exercice :

Soit $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *convexe, à valeurs finies.* (Rappelons qu'alors J est Lipschitzienne.)

1. Donner la définition de la dérivée directionnelle $\delta J(u)(v)$ de J en $u \in \mathbb{R}^N$ dans la direction de $v \in \mathbb{R}^N$.
Montrer que l'application $v \to \delta J(u)(v)$ est convexe, positivement homogène et lipschitzienne.
Peut-elle être linéaire et dans quel cas ?
2. Rappeler les deux définitions de $\partial J(u)$ – la sous-différentielle de J en $u \in \mathbb{R}^N$ et expliquer leur équivalence.
(On peut utiliser les propriétés de la fonction-pente $q(t) = \frac{J(u+tv)-J(u)}{t}$ pour $t > 0$.)
3. Soit $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $J(u_1, u_2) = |u_1| + \alpha|u_2|$ pour $\alpha > 0$ un paramètre fixe. Calculer la sous-différentielle de J au point $(u_1, u_2) = (1, 0)$.
Déterminer les directions de déscente de J à partir de ce point u.

ENS Cachan **2006-2007**
M2 parcours MVA

Optimisation pour la restauration d'images
Examen écrit, durée 1h30
Sujet : Minimisation par régularisation semi-quadratique

L'usage de notes et d'autres documents est autorisé.

Pour v fixé, on considère la minimisation de la fonction $F : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$:

$$F(u) = \|Au - v\|^2 + \beta \sum_{i=1}^{r} \varphi(\|G_i u\|), \quad \beta > 0, \tag{1}$$

où pour tout i, $G_i : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^s$, $s \in \{1, 2\}$ (chaque G_i est une matrice de taille $s \times n$), $A : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ est inversible et

- $\varphi : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ est convexe ;
- $t \to t^2/2 - \varphi(t)$ est convexe ;
- φ est $\mathcal{C}^2$ avec $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) > 0$;
- $\lim\limits_{|t| \to \infty} \varphi(t)/t^2 < 1/2$.

Exemple de fonction : $\varphi(t) = \sqrt{1 + t^2}$.

1. Pour tout $w \in \mathrm{R}^s$ avec $s = 1$ ou $s = 2$ on définit

$$\psi(w) = \sup_{z \in \mathrm{R}^s} \left\{ -\frac{1}{2}\|z - w\|^2 + \varphi(\|z\|) \right\} \tag{2}$$

   Vérifier s'il s'agit d'un maximum.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathrm{R}^s$

$$\varphi(z) = \inf_{w \in \mathrm{R}^s} \left\{ \frac{1}{2}\|z - w\|^2 + \psi(\|w\|) \right\} \tag{3}$$

   On utilisera le fait que si une fonction $f : \mathrm{R}^s \to \mathrm{R}$ est continue, finie, convexe, alors $f = (f^*)^*$ où la convexe conjuguée f^* de f est définie par $f^*(w) = \sup_{z \in \mathrm{R}^s} \{\langle z, w\rangle - f(z)\}$.

3. Déterminer la fonction $\sigma : \mathrm{R}^s \to \mathrm{R}^s$ telle que pour tout $z \in \mathrm{R}^s$, si $w = \sigma(z)$ alors $\varphi(z) = \frac{1}{2}\|z - w\|^2 + \psi(\|w\|)$.

   On peut utiliser le fait que pour le même couple $(z, \sigma(z))$ on trouve le sup dans (2).

   Dans la suite $s = 1$. Notons que dans ce cas chaque G_i est un vecteur-ligne.

   Pour commodité, introduisons la matrice G de taille $r \times n$ dont la ligne i est G_i.

On considère le critère augmenté $\mathcal{F} : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^r$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u,b) &= \|Au-v\|^2 + \beta \sum_{i=1}^{r} \big(\frac{1}{2}(G_i u - b_i)^2 + \psi(b_i)\big) \\
&= \|Au-v\|^2 + \frac{\beta}{2}\|Gu-b\|^2 + \beta \sum_{i=1}^{r} \psi(b_i)
\end{aligned}$$

où b_i désigne la $i$ème composante du vecteur $b \in \mathrm{R}^r$, et sa minimisation alternée où à l'itération k on effectue les minimisations suivantes

$$b^k \quad \text{tel que} \quad \mathcal{F}(u^{k-1}, b^k) = \inf_{b \in \mathrm{R}^r} \mathcal{F}(u^{k-1}, b) \tag{4}$$

$$u^k \quad \text{tel que} \quad \mathcal{F}(u^k, b^k) = \inf_{u \in \mathrm{R}^n} \mathcal{F}(u, b^k) \tag{5}$$

4. Montrer que la suite $F(u^k)$ est décroissante et qu'il existe un compact K tel que $u^k \in K$ pour tout k.
5. Calculer explicitement b^k et u^k définis par (4) et (5).
6. En insérant l'expression obtenue pour b^k dans (5), exhiber la fonction $J : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ telle que l'itération (4)-(5) est équivalente à
$$u^k = J(u^{k-1}).$$
7. Mettre J sous la forme $J(u) = u - (\mathcal{H}(u))^{-1}\nabla F(u)$ et commenter cette expression.
8. Calculer la différentielle DJ de J.
9. Vérifier si pour tout $u \in K$ le rayon spectral de $DJ(u)$ est strictement plus petit que 1.
10. En déduire quant à la convergence de la méthode itérative définie dans (4)-(5).

ENS Cachan **2005-2006**
M2 parcours MVA

Optimisation pour la restauration d'images
Examen Ecrit
Sujet: Méthode de minimisation d'une fonction sous contraintes inégalités

L'usage de notes et d'autres documents est autorisée. A l'exception de 2c, les réponses aux questions de la partie I sont très courtes. On n'a pas besoin de connaître la méthode de Uzawa pour développer la partie II.

On considère la résolution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{trouver } \hat{u} \text{ tel que } \; F(\hat{u}) &= \inf_{u \in U} F(u) \qquad (1) \\ U &= \{u \in \mathrm{R}^n : h(u) \leq 0\} \\ h(u) &= Au - b \in \mathrm{R}^m, \; m < n, \; A \in \mathrm{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

où F est une fonctionnelle convexe elliptique de constante $\mu > 0$.
(Rappel : F est $\mathcal{C}^1$ et $\langle \nabla F(u) - \nabla F(v), \; u - v \rangle \geq \mu \|u - v\|^2, \; \forall (u, v) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$.)

I. Préliminaires

1. Commenter l'existence et l'unicité d'une solution éventuelle $\hat{u}$ de (1).

   Rappel : le Lagrangien associé au problème (1) est la fonctionnelle $\mathcal{L} : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m_+ \to \mathrm{R}$ donnée par

   $$\mathcal{L}(u, \lambda) = F(u) + \langle \lambda, h(u) \rangle . \qquad (2)$$

2. Pour $\lambda \in \mathrm{R}^m_+$ fixé, on dénote par u_λ une éventuelle solution du problème

   $$u_\lambda \;\text{ tel que }\; \mathcal{L}(u_\lambda, \lambda) = \inf_{u \in \mathrm{R}^n} \mathcal{L}(u, \lambda). \qquad (3)$$

   (a) Etudier l'existence d'une solution u_λ. En cas d'existence, étudier son unicité.

   (b) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer u_λ.

   (c) Etudier la continuité de $\lambda \to u_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{R}^m_+$.
   (On peut considérer u_{λ_j} correspondant à une suite $\lambda_j \to \lambda$ et utiliser l'ellipticité de F.)

3. Pour $u \in \mathrm{R}^n$ fixé, on dénote par λ_u une éventuelle solution du problème

   $$\lambda_u \;\text{ tel que }\; \mathcal{L}(u, \lambda_u) = \sup_{\lambda \in \mathrm{R}^m_+} \mathcal{L}(u, \lambda). \qquad (4)$$

   (a) Argumenter l'existence d'une solution λ_u.

   (b) Peut-on écrire (4) sous la forme d'un problème de minimisation convexe ?
   Ecrire les conditions nécessaires et suffisantes que λ_u satisfait.
   (Ne pas omettre que $\lambda_u \geq 0$.)

4. En utilisant $\mathcal{L}$, donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un élément $\hat{u} \in \mathrm{R}^n$ soit une solution du problème (1). Commenter l'importance de ce résultat.

5. Par la suite, on dénote par $(\hat{u}, \hat{\lambda})$ un point-selle de $\mathcal{L} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ où $\mathcal{L}$ est donné dans (2).

   (Rappelons que $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}_+^m} \inf_{u \in \mathbf{R}^n} \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{\lambda}) = \inf_{u \in \mathbf{R}^n} \sup_{\lambda \in \mathbf{R}_+^m} \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{\lambda})$.)

   Argumenter l'existence de $(\hat{u}, \hat{\lambda})$. Ecrire les expressions permettant de déterminer $(\hat{u}, \hat{\lambda})$.

6. Montrer que pour tout $\rho > 0$, $\hat{\lambda}$ est la projection du point $\hat{\lambda} + \rho h(\hat{u})$ sur l'ensemble $\mathbf{R}_+^m$.

   (On peut s'inspirer de l'équation (6) donnée dans II.)

   Donner l'expression de Π_+^m qui est l'opérateur de projection sur $\mathbf{R}_+^m$.

II. Convergence de la méthode de Uzawa

Partant de $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+^m$ arbitraire, pour tout entier $k \geq 0$ on calcule

$$\begin{aligned} u_k \quad \text{tel que} \quad & \mathcal{L}(u_k, \lambda_k) = \inf_{u \in \mathbf{R}^n} \mathcal{L}(u, \lambda_k) && (5) \\ \lambda_{k+1} \quad = \quad & \Pi_+^m (\lambda_k + \rho h(u_k)) && (6) \\ \text{où} \quad & 0 < \rho < K && (7) \end{aligned}$$

où $K >$ est une constante à déterminer.

1. Pour λ_k donné, écrire une équation permettant de calculer u_k comme défini par (5).
2. Montrer que $\|\lambda_{k+1} - \hat{\lambda}\| \leq \|\lambda_k - \hat{\lambda} + \rho A(u_k - \hat{u})\|$.

   (On peut utiliser le fait que Π_+^m est une contraction ainsi que le résultat de I-6.)

3. En utilisant le résultat précédent et l'ellipticité de F, exhiber un nombre $\eta \in \mathbf{R}$ tel que

   $$\|\lambda_{k+1} - \hat{\lambda}\|^2 \leq \|\lambda_k - \hat{\lambda}\|^2 - \eta \|u_k - \hat{u}\|^2$$

   (On peut commencer par calculer $\nabla F(u_k) - \nabla F(\hat{u})$.)

4. Déterminer $K > 0$ dans (7) tel qu'on ait $\eta > 0$.
5. Etudier la convergence de $\|\lambda_k - \hat{\lambda}\|^2$ lorsque $k \to \infty$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite u_k.
7. La méthode donnée dans (5)-(7), permet-elle de résoudre le problème (1) ? (Donner des arguments.)
8. Commenter les liens possibles entre (5)-(7) et la méthode de gradient avec projection.
9. Montrer qu'il existe une sous-suite $(\lambda_{k_j})_{j \geq 0}$ qui est convergente.
10. Si rang$A = m$, montrer que $\mathcal{L}$ a un unique point-selle $(\hat{u}, \hat{\lambda})$.

ENS Cachan **2004-2005**
M2 parcours MVA

Optimisation pour la restauration d'images
Examen Ecrit

La durée de l'épreuve est de 3h. L'usage de notes et d'autres documents est autorisée.

1. Algorithme de projections cycliques

Pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, où $m \in \mathbb{N}$, soit $U_i \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, fermé et non vide, et $\Pi_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ l'opérateur de projection sur U_i. On suppose que $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ est non vide. Nous fixons $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ et, partant d'un $u_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire, nous définissons la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u_{k+1} = u_k + \lambda_k \left(\Pi_{i_k}(u_k) - u_k\right),$$
$$\text{où} \quad \varepsilon_1 \le \lambda_k \le 2 - \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad i_k = k \bmod m + 1.$$

(Rappelons que (k mod m) est le reste de la division entière de k par m.)

3 (1) Montrer que, pour tout $u \in U$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|u_{k+1} - u\|^2 \le \|u_k - u\|^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 \|\Pi_{i_k}(u_k) - u_k\|^2,$$

où $\|.\|$ désigne la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. → (1 1/2)
(Vérifier que $\langle \Pi_{i_k}(u_k) - u_k, u_k - u\rangle \le -\|\Pi_{i_k}(u_k) - u_k\|^2$. Noter que u_k peut ne pas appartient à U_{i_k}.)

1/2 (2) En déduire que la suite $(\|u_k - u\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1 (3) Déterminer $\lim_{k\to\infty} (\Pi_{i_k}(u_k) - u_k)$ et $\lim_{k\to\infty} (u_{k+1} - u_k)$.

1 1/2 (4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\ell_k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le \ell_k - k \le m-1$. Calculer $\lim_{k\to\infty} (u_{\ell_k} - u_k)$.
Pour $i \in \{1,\dots,m\}$, que vaut la limite de $(\Pi_i(u_{\ell_k}) - \Pi_i(u_k))$ lorsque $k \to \infty$? ← dire que Π_i contrac. ou continue

2 (5) Montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, nous avons $\lim_{k\to\infty} (\Pi_i(u_k) - u_k) = 0$.
(On peut considérer les limites de $(u_{\ell_k} - u_k)$, de $(\Pi_i(u_{\ell_k}) - u_{\ell_k})$ et de $(\Pi_i(u_{\ell_k}) - \Pi_i(u_k))$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, ℓ_k est le plus petit entier tel que $\ell_k \ge k$ et $i = \ell_k$ mod $m+1$.)

1 (6) Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente et que ca limite $\hat{u} = \lim_{j\to\infty} u_{k_j}$ satisfait $\hat{u} \in U$. (Utiliser (2) et (5).)

1 1/2 (7) Prouver que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\hat{u} \in U$.
(A cette fin, étudier la convergence de $(\|u_k - \hat{u}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ dans la lumière de (2) et (6).)

3 (8) Pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, soit $a_i \in \mathbb{R}^n$ et $d_i \in \mathbb{R}$, et

(dont 2 1/2 pour le calcul de Π_i) $$U = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, u\rangle \le d_i,\ 1 \le i \le m\}.$$

On suppose que $U \ne \emptyset$. Proposer comment appliquer l'algorithme ci-dessus pour calculer un point $\hat{u} \in U$. Déterminer les opérateurs de projection correspondants.
1/2 Que va-t-il se produire si U est vide?

3 1/2

2. Minimisation d'une fonctionnelle

Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on considère la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \|u - v\|^2 + \beta \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

6

1 (1) Commenter l'existence et l'unicité de minimum de F.

1 1/2 (2) Donner des conditions nécessaires et suffisantes de minimum de F. (1 si CNS sur f_i)

(3) Proposer une méthode de minimisation et justifier ce choix.

3 1/2 (On peut noter que si F est de la forme $F(u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i)$ où $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, alors F a un minimum en $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $i = 1,\dots,n$, f_i a un minimum en $\hat{u}_i$.)

(dont 2 1/2 pour le calcul de $\hat{u}_i$) explicite

Bonus $\frac{1}{2} \to 1$ pour clarté de présentation.

Bonus 1 BCO

1. $\langle \Pi_{i_k}(u_k)-u_k, u_k-u\rangle = \langle \Pi_{i_k}(u_k)-u_k, u_k-\Pi_{i_k}(u_k)+\Pi_{i_k}(u_k)-u\rangle$

$= -\|\Pi_{i_k}(u_k)-u_k\|^2 + \underbrace{\langle \Pi_{i_k}(u_k)-u_k, \Pi_{i_k}(u_k)-\underset{\in U_{i_k}}{u}\rangle}_{\leq 0} \leq -\|\Pi_{i_k}(u_k)-u_k\|^2$

$\|u_{k+1}-u\|^2 = \|u_k+\lambda_k(\Pi_{i_k}(u_k)-u_k)-u\|^2$

$= \|u_k-u\|^2 + 2\lambda_k\langle \Pi_{i_k}(u_k)-u_k, u_k-u\rangle + \lambda_k^2\|\Pi_{i_k}(u_k)-u_k\|^2$

$\leq \|u_k-u\|^2 + \underbrace{\lambda_k(\lambda_k-2)}_{\leq -\varepsilon_1\varepsilon_2}\|\Pi_{i_k}(u_k)-u_k\|^2$

2. $\|u_{k+1}-u\|^2 \leq \|u_k-u\|^2 \Rightarrow (\|u_k-u\|)_{k\geq 0} \geq 0$ monotone décroissante

$\Rightarrow$ converge $\quad \ell = \lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|^2$

3. $\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{>0}\|\Pi_{i_k}(u_k)-u_k\|^2 \leq \|u_{k+1}-u\|^2 + \|u_k-u\|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $\quad$ ($\|u_{k+1}-u\|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \ell$, $\|u_k-u\|^2 \to \ell$)

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}(\Pi_{i_k}(u_k)-u_k)=0$

$u_{k+1}-u_k = \underset{>0}{\lambda_k}(\Pi_{i_k}(u_k)-u_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} u_{k+1}-u_k = 0$

4. Si $l_k = k$, $\lim = 0$. Supposons $l_k > k$

$\|u_{l_k}-u_k\| \leq \|u_{l_k}-u_{l_k-1}\| + \|u_{l_k-1}-u_{l_k-2}\| + \dots + \|u_{k+1}-u_k\|$

$\forall \varepsilon\ \exists k_\varepsilon$ tq $k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \|u_{k+1}-u_k\| \leq \frac{\varepsilon}{m} \Rightarrow \|u_{l_k}-u_k\| \leq \varepsilon$

$\|\Pi_i(u_{l_k}) - \Pi_i(u_k)\| \leq \|u_{l_k}-u_k\| \to 0$

5. $\|\Pi_i(u_k)-u_k\| = \|\Pi_i(u_k)-\Pi_i(u_{l_k})+\Pi_i(u_{l_k})-u_{l_k}+u_{l_k}-u_k\|$

$\leq \|\Pi_i(u_k)-\Pi_i(u_{l_k})\| + \|\Pi_i(u_{l_k})-u_{l_k}\| + \|u_{l_k}-u_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\to 0$ car 4(a) et Π_i contraction $\quad \xrightarrow{③} 0 \quad \xrightarrow{4(a)} 0$

6. ② $\Rightarrow (u_k)$ bornée $\leq M. \Rightarrow (u_{k_j})_{j\geq 0}$ convergente $\hat{u} = \lim_{j\to\infty} u_{k_j}$

Π_i continue $\xRightarrow{⑤} \forall i \quad 0 = \lim_{j\to\infty}\Pi_i(u_{k_j}) - u_{k_j} = \Pi_i(\hat{u}) - \hat{u}$

$\Rightarrow \Pi_i(\hat{u}) = \hat{u} \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \hat{u} \in U$

7. $\left.\begin{array}{l} ② \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|u_k-\hat{u}\| = c \\ ⑦ \Rightarrow \lim_{j\to\infty}\|u_{k_j}-\hat{u}\| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \lim \|u_k-\hat{u}\| = 0$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} u_k = \hat{u}$

⑧ $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i \qquad U_i = \{ u \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, u \rangle \leq d_i \}$

si $u \notin U_i$ alors $\Pi_i u$ = Solution de

$$\min_{v \in \mathbb{R}^n} \|v - u\|^2 \text{ sous la contrainte } \langle a_i, v \rangle = d_i$$

$$\Pi_i u = u - \frac{1}{\|a_i\|^2} \left(\langle a_i, u \rangle - d_i \right) a_i$$

Ex II Méthode de relaxation $\beta \geq 0$

$$\hat{u}_i = 0 \quad \text{si} \quad |v_i| \leq \frac{\beta}{2}$$

$$\hat{u}_i = v_i - \frac{\beta}{2} \quad \text{si} \quad v_i \geq \frac{\beta}{2}$$

$$\hat{u}_i = v_i + \frac{\beta}{2} \quad \text{si} \quad v_i \leq -\frac{\beta}{2}$$